Jurnal Jendela Matematika
Volume 2 No 02 Juli 2024
ISSN: 2986-7134 (Print) / ISSN: 2985-9875 (Online)
The article is published with Open Access at: https://www.ejournal.jendelaedukasi.id/index.php/JJM

Penerapan Metode Newton Raphson Untuk Pendugaan Parameter Regresi Non Linear Cobb-Douglas

Binti Karomah✉, Universitas Surakarta

✉ *bintikaromah@gmail.com*

Abstract: Inference in Cobb-Douglas model problems is a form of statistical inference that helps solve inference problems that involve a combination of several distributions. One form of distribution is a parametric distribution, and the other is a nonparametric distribution. To model the nonlinear Cobb-Douglas distribution and perform inference, such as determining test statistics, you can use maximum likelihood and then continue using the Newton rapshon method. Parameter estimates for the Cobb-Douglas nonlinear regression model were determined using the maximum likelihood method which was assumed to be normally distributed. then analyze the estimator σ^2 first to obtain the Cobb-Douglas regression model estimator using the second order Taylor series approach to obtain the Newton Rapshon method. Based on the research results, it was found that the general form of parameter estimation for the Cobb-Douglas nonlinear regression model using the Newton-Raphson iterative method is:

$$\hat{\beta}^{(n-1)} = \hat{\beta}^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\beta}^{(n)}} \quad \text{With} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \underset{\sim}{\mathrm{X}\beta} \right)^{\mathrm{T}} \left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \underset{\sim}{\mathrm{X}\beta} \right)}{n}$$

So the parameter estimator is in scalar form.

Keywords: Parameter estimation, Cobb-Douglas Nonlinear Regression, Maximum Likelihood Method, Taylor Series, Newton Rapshon.

Abstrak: Inferensi dalam masalah model Cobb-Douglas adalah bentuk inferensi statistik yang membantu memecahkan masalah inferensi yang melibatkan kombinasi beberapa distribusi.Salah satu bentuk distribusinya adalah distribusi parametrik, dan yang lainnya adalah distribusi nonparametrik. Untuk memodelkan distribusi Cobb-Douglas nonlinier dan melakukan inferensi, seperti menentukan statistik pengujian, dapat menggunakan maksimum likelihood dan kemudian melanjutkan menggunakan metode Newton rapshon. Estimasi parameter model regresi nonlinier Cobb-Douglas ditentukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood yang diasumsikan berdistribusi normal. kemudian menganalisis estimator σ^2 terlebih dahulu untuk mendapatkan estimator model regresi Cobb-Douglas dengan menggunakan pendekatan deret Taylor ordo dua sehingga di peroleh metode Newton Rapshon. Berdasarkan hasil penelitian, didapatkan bahwa bentuk umum estimasi parameter model regresi nonlinier Cobb-Douglas menggunakan metode iterative Newton-Raphson adalah

$$\hat{\beta}^{(n-1)} = \hat{\beta}^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\beta}^{(n)}} \quad \text{dengan} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \underset{\sim}{\mathrm{X}\beta} \right)^{\mathrm{T}} \left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \underset{\sim}{\mathrm{X}\beta} \right)}{n}$$

Sehingga penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ berbentuk skalar.
Kata kunci: Pendugaan parameter, Regresi Nonlinier Cobb-Douglas, Metode Maksimum Likelihood, Deret Taylor, Newton Rapshon.

Received 20 Juli 2024; **Accepted** 30 Juli 2024; **Published** 31 Juli 2024

Citation: Karomah, B. (2024). Penerapan Metode Newton Raphson Untuk Pendugaan Parameter Regresi Non Linear Cobb-Douglas. *Jurnal Jendela Matematika*, 2 (02), 93-103

PENDAHULUAN

Secara umum statistika merupakan ilmu yang menggambarkan proses perencanaan, pengumpulan, analisis, interpretasi, dan penyajian data. Statistika merupakan ilmu yang berkaitan dengan data, namun statistika merupakan hasil penerapan algoritma statistika terhadap data, informasi, atau data. Statistik deskriptif merupakan ilmu statistika yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan data.

Statistik mulai berkembang karena pemerintah dan pihak yang berwenang memerlukan cara untuk mengumpulkan informasi tentang data ekonomi, demografi, dan politik suatu negara. Lebih lanjut, statistika adalah kumpulan konsep dan metode pengumpulan data, menyajikannya dalam format yang mudah dipahami, menganalisis data, dan menarik kesimpulan berdasarkan hasil analisis data dalam situasi ketidakpastian dan variasi. Karena statistik didasarkan pada pemikiran probabilistik, maka hasil pengolahan data dengan metode statistik bukanlah hasil yang pasti, melainkan hasil perkiraan ketidakpastian variasi yang terjadi pada suatu fenomena tertentu. Keunikan statistik adalah terjaminnya tingkat ketidakpastian tertentu. Dalam penelitian ini, penulis membahas keunikan statistik dengan memperkirakan parameter β dan σ^2 .

Estimasi parameter biasanya dilakukan pada sekumpulan data sampel untuk mendapatkan pendekatan trend terhadap variabel independen dari persamaan fungsi respons. Hal ini terdiri dari penciptaan kondisi khusus (optimal) pada fungsi tujuan. misalnya estimasi menggunakan metoda maksimum likelihood. Hal ini dimaksudkan untuk memaksimalkan keadaan fungsi tujuan sebagai fungsi probabilitas gabungan dan didapatkan nilai parameter β dan σ^2.

Upaya ini umum dilakukan dan relatif mudah untuk model linier. Ini adalah cara untuk mengubah (mengurangi) jumlah model non linier ke bentuk linier. Salah satunya adalah model regresi non linier Cobb-Douglas. Diperlukan teknik yang tepat untuk memperkirakan parameter model Cobb-Douglas. Meskipun ada banyak cara untuk memperkirakan parameter model nonlinier, salah satu metode klasik untuk memperkirakan model regresi nonlinier adalah metode Newton-Raphson.

Dalam model regresi non linier Cobb-Douglas, estimasi parameter ditentukan secara iteratif. Untuk memperoleh estimasi parameter dari model eigen *instrinsik*, terlebih dahulu harus mengkonversi model nonlinier ke bentuk linier untuk memudahkan memperoleh estimasi parameter. Mengenai nilai observasi (variabel acak), estimasi parameter mengasumsikan bahwa nilai observasi berdistribusi normal.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan atau tinjauan pustaka. Kemudian penulis melakukan analisis estimasi Newton-Raphson menggunakan estimasi maksimum Likelihood dengan menganalisis model statistik non linier bentuk umum.

Berdasarkan penjelasan di atas, penulis melakukan beberapa langkah untuk memperoleh hasil estimasi Newton-Raphson. Diantaranya adalah:

1. Sebagai persiapan awal untuk analisis metode estimasi Newton-Raphson, yaitu dengan menentukan model nonlinier Cobb-Douglas.
2. Linierkan persamaan Cobb-Douglas sehingga diperoleh persamaan yang berdistribusi normal.
3. Carilah fungsi dengan variabel bebas dari persamaan distribusi normal.
4. Analisis fungsi untuk mendapatkan estimasi parameter β
5. Analisis fungsi untuk mendapatkan estimasi parameter σ^2
6. Setelah paramete σ^2 diketahui menggunakan pendekatan Taylor, maka ditentukan persamaan iterasi Newton-Raphson untuk persamaan non linear maksimum likelihood dengan menggunakan pendekatan L(β) disekitar $\beta^{(1)}$
7. Merumuskan model regresi Cobb-Douglas menggunakan metode Newton-Rapson.

PEMBAHASAN

1. Penentuan Penduga Parameter Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Saat menggunakan metode Newton-Raphson untuk menentukan estimator parameter regresi Cobb-Douglas nonlinier, kita harus terlebih dahulu mengasumsikan variabel independen dengan distribusi yang digunakan. Penelitian ini mengasumsikan variabel independen β berdistribusi normal. Namun pada penelitian ini digunakan metode iterasi Newton-Raphson dengan estimasi maksimum likelihood (MLE) untuk mencari penduga L(β) disekitar nilai awal $\beta^{(1)}$.

a. Menentukan Penduga Parameter β Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Bentuk Regresi nonlinier cobb-douglas adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} + \varepsilon_i \tag{1}$$

dari persamaan 3.1 dimana ε ~N (0,) sehingga dapat di cari fungsi sebaran dari y dengan cara menjadikan fungsi logaritma

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} + \varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2}) + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \left(\ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i\right) + (\ln \varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \ln \varepsilon_i \tag{2}$$

dari persamaan 2 didapat persamaan $\ln(Y_i) = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \ln \varepsilon_i$ dimana $\ln\left(Y_i \right) \sim N\left(\ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i, \sigma^2\right)$

Dengan menggunakan pendekatan matriks, persamaan (2) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_1 & \ln K_1 \\ 1 & \ln L_2 & \ln K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_n & \ln K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Misalkan

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_1 & \ln K_1 \\ 1 & \ln L_2 & \ln K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_n & \ln K_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, Bentuk linier Regresi Nonlinier Cobb-douglas dengan pendekatan matrik adalah:
Oleh karena itu, bentuk linear dari regresi Cobb-Douglas non-linier dengan menggunakan pendekatan matriks adalah:

$$\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{Y}} = \underset{n\times 3}{\mathbf{X}} \underset{3x1}{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{4}$$

Oleh karena itu persamaan regresi nonlinier Cobb-Douglas diubah ke bentuk linier dan diambil bentuk normalnya adalah:

$$\underset{\sim}{Y} = \mathbf{X}\,.\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{5}$$

Karena persamaan (5) berdistribusi normal, maka fungsi densitas dan variabel bebas ε_i juga berdistribusi normal, sehingga fungsi distribusi peluang dari $\underset{\sim}{Y}^*$ adalah :

$$f(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{6}$$

Fungsi kemungkinan (L) didefinisikan sebagai fungsi kepadatan gabungan dari random eror(kesalahan acak). Dengan asumsi kesalahan acak bersifat independen, maka distribusi probabilitas Yi terhadap $\underset{\sim}{\beta}$ dan σ^2 adalah hasil dari fungsi lain (fungsi marginal) dengan i = 1,2,3…n dan dirumuskan sebagai:

$$f(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^n e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{7}$$

Sehingga fungsi likelihood diperoleh:

$$L(\underset{\sim}{\beta}, (\sigma)^T \sigma \mid \underset{\sim}{Y}) = \quad = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{8}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (8), dengan menggunakan logaritma natural, kita mendapatkan:

$$L(\underset{\sim}{\beta}, (\sigma)^T \sigma \mid \underset{\sim}{Y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \ln \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \right]$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \right) + \ln\left(\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \right) + \ln\left(\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)\ln(e)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}_{H}(1)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(H)$$

Dimana

$$H = \left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}^T X^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(2\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + (2)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

Sehingga bisa di tulis

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] +$$
$$\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] \qquad (9)$$

Dari persamaan diatas untuk memperoleh penduga $\underset{\sim}{\beta}$ dengan metode maksimum likelihood yakni dengan memaksimumkan persamaan tersebut terhadap $\underset{\sim}{\beta}$ dengan menurunkan fungsi terhadap fungsi $\underset{\sim}{\beta}$.

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\beta}, (\sigma)^T\sigma^2 | \underset{\sim}{Y})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0 - (0)\left\{(0) + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \underset{\sim}{Y}^T X\sigma^{-1}\right] - \frac{1}{2}2\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \underset{\sim}{\beta}^T X^T X\sigma^{-1}\right]\right\} \qquad (10)$$

Karena $\dfrac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\beta}, (\sigma)^T\sigma^2 | \underset{\sim}{Y}))}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0$

Maka

$$\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T X\right)\sigma^{-1}\right] = \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \hat{\underset{\sim}{\beta}}^T X^T X\,\sigma^{-1}\right]$$

$$\left(\underset{\sim}{Y}^T X\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\sigma^{-1}\right] = \left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}^T X^T X\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\sigma^{-1}\right]$$

$$\left(X \underset{\sim}{Y}^T\right) = \left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\right) \frac{\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right]}{\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right]}$$

$$\left(X \underset{\sim}{Y}^T\right) = \left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\right)(1)$$

$$X \underset{\sim}{Y}^T = \underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X}^T\right)^{-1} \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{Y} \tag{11}$$

b. Menentukan Penduga Parameter σ^2 Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Dalam menentukan estimator parameter σ^2 yaitu memaksimalkan persamaan 9 dengan mendiferensialkannya terhadap σ^2 dan menjadikannya sama dengan nol

$$\ln l\left(\beta, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T \underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X \underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T \underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}(I)\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^T\left(\underset{\sim}{Y}^T X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}(I)\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^T\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X \underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}(I)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{Y}^T \underset{\sim}{Y}\right)\right] + \left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{\beta}\ X\ \underset{\sim}{Y}^T\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{\beta}^T X^T X\ \underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left[\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{Y}^T \underset{\sim}{Y}\right) + \left(\frac{1}{2\sigma^2}2\left(\underset{\sim}{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{Y}\right)\right) - \left(\frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\beta}^T \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

Atau

$$\ln l\left(\beta, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) == -\frac{n}{2}(\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2))\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)\right] \tag{12}$$

maka

$$\ln l\left(\beta, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) = -\frac{n}{2}(\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2)) - \frac{1}{2\sigma^2} Q \tag{13}$$

jika

$$Q = \left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)$$

Diturunkan terhadap σ^2, karena untuk memaksimumkan L sehingga didapat :

$$\ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) = -\frac{n}{2}(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)) - \frac{1}{2\sigma^2}\,Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(0+\frac{1}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma^{-2-2}\right)\right)Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma^{-4}\right)\;Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^4}Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}Q \tag{14}$$

Menyamakan dengan nol akan diperoleh.

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = 0$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}Q$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}Q$$

$$n\frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\,\frac{1}{\sigma^2}Q$$

$$n = \frac{1}{\sigma^2}Q$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q}{n}$$

Atau

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}{n} \tag{15}$$

2. Menentukan Iterasi Penduga β Model Regresi Non Linear Cobb-Douglas dengan Menggunakan Newton Rapshon

Untuk menentukan persamaan iteratif Newton-Raphson untuk persamaan nonlinier Maksimum Likelihood bisa menggunakan pendekatan L(β) di sekitar nilai awal dengan deret Taylor. Oleh karena itu, persamaan (13) disubstitusikan ke persamaan (15) dan didapatkan:

$$L(\underset{\sim}{\beta}) \quad = L = -\frac{n}{2}\left(\ln\,(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{1.Q}{2\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Q.1}{2\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{Q}{2}\frac{1}{\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{Q}{2}\left(\frac{Q}{n}\right)^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{Q}{2}\left(\frac{n}{Q}\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{Qn}{2Q}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{nQ}{2Q}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{n}{2}\frac{Q}{Q}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{n}{2}.1$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{n}{2}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right)-\frac{n}{2}$$

$$=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln\left(\frac{\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)}{n}\right)\right)-\frac{n}{2} \qquad (16)$$

Pendekatan L(β) disekitar $\beta^{(1)}$ dengan deret taylor orde 2, yaitu

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i)+f'(x_i)\,\frac{\Delta x}{1!}+f''(x_i)\,\frac{(\Delta x)^2}{2!}$$

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara $\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}$

(1) : permisalan data ke-1

Karena $\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$ berbentuk matrik maka $\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^2=\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$

sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$L(\underset{\sim}{\beta})=L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\frac{\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{1!}+\frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\,\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\frac{\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^T\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{2!}$$

$$L(\underset{\sim}{\beta})=L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\frac{\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{1!}+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^T\frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\,\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$$

$$L(\underset{\sim}{\beta})=L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^T\frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\,\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\left(\underset{\sim}{\beta}-\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) \qquad (17)$$

$$\frac{\partial L(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \right)^{T} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta} \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \right)$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{\partial L(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \right)^{T} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta} \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \right) \tag{18}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \right)^{T} = \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \right) \tag{19}$$

Maka

$$\frac{\partial L\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta} \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\beta^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \right) \tag{20}$$

Dengan menyamakan dengan nol akan didapatkan

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta} \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta}^{(2)} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \right) \tag{21}$$

Atau

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^{T}} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \tag{22}$$

Secara umum dapat diperoleh model iterasi:

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^{T}} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}}$$

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^{T}} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)$$

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^{T}} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \tag{23}$$

Namun metode Newton-Rapson tidak dapat digunakan untuk menentukan estimasi parameter karena estimasi parameter σ^2 karena bersifat konstan berapapun perubahan nilai β maka σ^2 adalah tetap.

SIMPULAN

Dari penjelasan yang sudah dibahas dapat dismpulkan bahwa:

1. Estimasi parameter $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ model regresi non linier Cobb-Douglas menggunakan metode Newton-Raption dengan *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE) adalah:

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{X}^{T} \underset{\sim}{Y} \left(\underset{\sim}{X} \underset{\sim}{X}^{T} \right)^{-1}$$

2. Estimasi $\hat{\sigma}^2$ diperoleh dengan memaksiamlkan dan mendiferensialkan fungsi Likelihood, sehingga didapatkan:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}{n}$$

3. Model regresi Cobb-Douglas menggunakan metode Newton-Raphson diperoleh dengan mengganti mengganti fungsi Likelihood dengan nilai estimasi $\hat{\sigma}^2$:

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial\beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$

4. Pendugaan $\hat{\sigma}^2$ untuk newton raphson adalah σ^2

DAFTAR PUSTAKA

1. Ahfazh "Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi Cobb-Douglas Non-Linier Menggunakan Metode Least Square" *Jurnal Kubik Publikasi Ilmiah Matematika* 1 (1): 1-9
2. Aziz, Abd . 2006 *Ekonometrika teori dan praktek eksperimen dengan Matlab.* Malang: UIN Malang press.
3. Bambang. 2002 *Metode numerik dilengkapi dengan program komputer.* Yogyakarta: Beta Offset.
4. Draper, Norman and Smith, Harry. 1992. *Analisi Regresi Terapan*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
5. Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: Bumi Aksara.
6. Mood, M Alexander dkk.1986. *Introduction to the Theory of Statistics*. Mcgraw-Hill Book Company.
7. Rorres Anton.2004. *Aljabar linier elermenter Versi Aplikasi.* Jakarta: Erlangga
8. Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
9. Soelistyo. 2001. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Yogyakarta: BPFE
10. Spiegel, Murray R.1984. *Kalkulus Lanjutan*. Jakarta: Erlangga.
11. Steel, Robert G.D. and Torri, James H. 1989. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik.* Jakarta: Gramedia
12. Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta : C.V Rajawali
13. Zulaikah, Ririn. (2014) *"Estimasi Parameter Pada Model Statistik Nonlinier Secara Least Square "* Malang: Digilib Uin Malang.

PROFIL SINGKAT

Binti Karomah adalah dosen di Fakultas Teknik di Universitas Surakarta.