Jurnal Jendela Matematika

Jurnal Jendela Matematika
Volume 3 No 02 Juli 2025
ISSN: 2986-7134 (Print) / ISSN: 2985-9875 (Online)
The article is published with Open Access at: https://www.ejournal.jendelaedukasi.id/index.php/JJM

Analisis Kestabilan Model Diskrit Predator Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada Predator

Leidi Sigar ✉, Universitas Negeri Gorontalo
Nurainsyah Mohamad, Universitas Negeri Gorontalo
Nur Miftah Muhammad, Universitas Negeri Gorontalo
Verawati Moha, Universitas Negeri Gorontalo
Nunung Usman, Universitas Negeri Gorontalo

✉ *einsigar03@gmail.com*

Abstract: This study focuses on a predator-prey model with the assumption of toxin application to predators. The aim of the research is to modify the continuous model developed in previous studies by performing nondimensionalization, discretizing the model, analyzing the stability of equilibrium points in the resulting discrete model, and conducting numerical simulations to visualize the system's dynamics and verify the theoretical stability analysis. The findings reveal the existence of four equilibrium points, namely $\mathrm{E}_1 = (0{,}0)$E_1 = (0, 0) and $\mathrm{E}_2 = (\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{K}}, \frac{1-\mathrm{p}}{\beta})$,, where the stability of each point depends on certain conditions.

Keywords: Non-dimensionalization, Discretization, Predator-Prey Model

Abstrak: Penelitian ini membahas tentang model *predator-prey* dengan asumsi pemberian racun pada *predator*. Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi model kontinu yang telah dikembangkan dalam penelitian sebelumnya dengan melakukan proses nondimensionalisasi, mendiskritisasi model tersebut, menganalisis kestabilan titik-titik kesetimbangan pada model diskrit yang dihasilkan, serta melakukan simulasi numerik untuk memvisualisasikan dinamika sistem dan memverifikasi hasil analisis kestabilan secara teoretis. Hasil penelitian mengungkapkan adanya dua titik kesetimbangan, yaitu $E_1 = (0{,}0)$ dan $E_2 = (\frac{a}{K}, \frac{1-p}{\beta})$, di mana kestabilan masing-masing titik bergantung pada kondisi tertentu.

Kata Kunci: Non-dimensionalisasi, Diskritisasi, Model Predator-Prey, Leslie Gower

Received 27 Juni 2025; **Accepted** 7 Juli 2025; **Published** 20 Juli 2025

Citation: Sigar, L., Mohamad, N., Muhammad, N.M., Moha, V., & Usman, N. (2025). Analisis Kestabilan Model Diskrit Predator Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada Predator. *Jurnal Jendela Matematika*, 3 (02), 120-126.

Copyright ©2025 Jurnal Jendela Matematika
Published by CV. Jendela Edukasi Indonesia. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-Non Commercial-Share Alike 4.0 International License.

PENDAHULUAN

Dalam dunia nyata, makhluk hidup merupakan makhluk sosial yang selalu berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi ini sangat penting untuk dipelajari karena memengaruhi kelangsungan hidup suatu populasi dalam ekosistem (Panigoro, 2014). Salah satu bentuk interaksi dalam ekosistem yaitu predasi. Predasi (predatorisme) adalah interaksi yang menggambarkan hubungan antara pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*) yang menjadi sumber makanannya (Saktiyono, 2007).

Model dasar dinamika antara *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Alfred James Lotka dan Vito Voltera dengan mengasumsikan bahwa ketika terjadi predasi, maka populasi *prey* akan tumbuh secara eksponensial saat tidak ada *predator*. Sedangkan saat tidak ada *prey,* maka populasi *predator* akan mengalami kematian dan berkurang (Logan, 2015). Kemudian pada tahun 1948, Leslie dan Gower memodifikasi model Lotka-Volterra yang awalnya tumbuh secara eksponensial, dimodifikasi menjadi tumbuh secara logistik dengan asumsi bahwa daya dukung lingkungan *predator* proporsional terhadap populasi *prey*. Modifikasi ini menghasilkan model yang disebut model Leslie-Gower (Leslie, P. H. 1948). Dalam model ini, interaksi yang terjadi ialah dimana *predator* mengkonsumsi prey agar dapat bertahan hidup sedangkan *prey* memiliki persediaan makanan yang cukup di lingkungannya. Jika populasi *prey* terbatas, maka populasi *predator* akan menurun sesuai dengan jumlah proporsi mangsanya (Sholeh, M., Kholipah, S., 2013).

Beberapa penelitian telah membahas modifikasi model predator-prey diantaranya A. A. Shaikh., 2018 terkait studi model *predator*-mangsa LG-Holling tipe III dengan penyakit pada predator. Selanjutnya penelitian A.K. PAL., 2020 membahas terkait pengaruh ketakutan terhadap model ekologi-epidemiologi *predator-prey* Lesli-Gower yang dimodifikasi dengan penyakit pada *predator.* Kemudian penelitian terbaru oleh Panigoro, dkk yang membahas Leslie-Gower. Adapun dalam tulisan ini membahas peran manusia dalam keberadaan *predator* dan *prey*. Dalam suatu lingkungan yang menunjukkan interaksi antara *predato-prey*, seperti di area peternakan, seringkali *prey* berada dalam ancaman kepunahan akibat keberadaan *predator*. Oleh karena itu, artikel ini mengkaji model *predator-prey* Leslie-Gower dengan penerapan racun pada *predator.* Model ini dirancang untuk menganalisis kestabilan sistem yang terkait. Untuk menghindari perolehan solusi analitik dengan menggunakan pendekatan numerik, dilakukan diskritisasi yang awalnya model kontinu menjadi model diskrit. Proses diskritisasi ini menghasilkan model diskrit yang dapat mendekati solusi model kontinu (Husain, M. R., Nurwan dan Resmawan., 2020).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi kepustakaan, yang dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber, seperti buku dan jurnal. Penelitian ini berfokus pada proses mendiskritisasi model kontinu yang diacu dari penelitian (arsyad. dkk 2020) kemudian menganalisis kestabilan titik kesetimbangan serta melakukan simulasi numerik pada model diskrit yang dihasilkan. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan meliputi:

1. Mendiskritisasi model predator-prey Leslie-Gower dengan pemberian racun pada predator menggunakan metode diskritisasi Euler.
2. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model diskrit dengan menggunakan matriks Jacobian untuk mengevaluasi dinamika kestabilan lokal.
3. Melakukan simulasi numerik untuk menyelidiki pengaruh parameter model terhadap kestabilan serta dinamika sistem.

HASIL PENELITIAN

Diskritisasi Model

Model *predator-prey* dituliskan pada persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PX$$
$$\frac{dX}{dt} = \beta PX - \varphi X \qquad (1)$$

dengan P dan X menunjukkan kepadatan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan K, β, r, φ menunjukkan *carrying capacity*, tingkat interaksi *predator-prey*, laju pertumbuhan *prey*, dan tingkat kematian *predator*. Karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak, asumsikan bahwa $K, \beta, r, \varphi > 0$ (Barnes, B., Fulford, G.R., 2002).

Sebelum diskritisasi, dilakukan proses non-dimensionalisasi pada model *predator-prey* untuk menyederhanakan model dengan menghilangkan beberapa parameter, yang akan memudahkan analisis lebih lanjut. Untuk menon-dimensionalisasikan model, dipilih $(P, X, t) \to \left(P\hat{P}, X\hat{X}, t_0\tau\right)$ sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$\frac{dP}{d\tau} = P(1 - P) - \beta PX$$
$$\frac{dX}{d\tau} = PKX - aX \qquad (2)$$

Dengan menggunakan metode Euler, diskritisasi dari model non-dimensional pada model (3) sebagai berikut:

$$P_{n+1} = P_n + h\,[P_n\,(1 - P_n) - \beta P_n X_n]$$
$$X_{n+1} = X_n + h\,[PKX_n - aX_n]$$

Parameter yang menunjukkan ukuran langkah dalam perhitungan numerik adalah h, dengan h > 0. Untuk mendapatkan titik kesetimbangan dari model (3) dapat dilakukan dengan menyelesaikan kedua persamaan berikut secara simultan.

$$P = P + h[(1 - P) - \beta PX]$$
$$X = X + h[PKX - aX] \qquad (4)$$

sehingga diperoleh dua titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$E_1 = (0,0),$$
$$E_2 = \left(\frac{a}{K}, \frac{1-P}{\beta}\right). \qquad (5)$$

1. Eksistensi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

i) Titik E_1 yang selalu eksis pada $\mathbb{R}^2_+$.

ii) Titik E_2 eksis di $\mathbb{R}^2_+$ jika P < 1.

Dengan melakukan linearisasi pada model (5), diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_{(P,X)} = \begin{bmatrix} 1 + h - 2hP - h\beta X & -h\beta P \\ 1 + hPK - ha & hKX \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Teorema 2.1. *Titik E_1 memiliki 2 kondisi sebagai berikut.*

i) E_1 tidak stabil tipe saddle jika $-2 < h < 0$.

ii) E_1 tidak stabil tipe source jika $0 < -1$ *atau* $h < -2$.

iii) E_1 tidak stabil tipe non-hiperbolik jika $h = 2$ *atau* $h = -2$.

Bukti. Titik $E_1 = (0,0)$ disubtitusi pada matriks Jacobi, sehingga diperoleh

$$J_{(E_1)} = \begin{bmatrix} 1+h & 0 \\ 1-ha & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen yang dihasilkan dari matriks jacobi $J_{(E_1)}$ adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 1 + h$. Jika $-2 < h < 0$ maka $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$, sehingga titik kesetimbangan E_1 tidak stabil. Jika $0 < -1$ atau $h < -2$, maka $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| > 1$, sehingga menurut Teorema 2.1 titik kesetimbangan E_1 tidak stabil. Jika $h = 2$ atau $h = -2$, maka $|\lambda_1| = 1$ dan $|\lambda_2| = 1$ tidak stabil.

Teorema 2.2. *Titik E_2 memiliki dua kondisi sebagai berikut.*

i) *E_2 stabil tipe sink jika memenuhi salah satu kondisi berikut:*
$\vartheta \geq 0$ *dan* $h < \tau$; *atau*
$\vartheta < 0$ *dan* $h < \min\left(\frac{1}{E+F}, V\right)$,

ii) *E_2 stabil tipe saddle jika $\vartheta > 0$ dan $h > \tau$,*

iii) *E_2 stabil tipe source jika $\vartheta < 0$ dan $h > \tau$,*

iv) *E_2 stabil tipe non-hiperbolik jika memenuhi salah satu kondisi berikut:*
$\vartheta \geq 0$ *dan* $h = \tau$
$\vartheta < 0$ *dan* $h = \omega$ dan $h^2(E^2 + F^2 - 2EF) + 2h(E + F) + 4h\frac{Fa}{K}$.

dengan $\tau = \frac{\beta a - K(E+F)}{KEF}$, $\vartheta = \sqrt{M^2 - 4N}$, $N = \left[h\left(-\frac{2ha}{K} - \frac{(1-P^*)}{\beta}\right)\left(hk\left(\frac{(1-P^*)}{\beta}\right)\right) + \left(\frac{h\beta a}{K}\right)\left(1 + \frac{ha}{K} - ha\right) - hk\left(\frac{(1-P^*)}{\beta}\right)\right]$, $M = h\left(-\frac{2ha}{k} - \frac{(1-P^*)}{\beta}\right)$-hk$\left(\frac{(1-P^*)}{\beta} - 1\right)$, $\omega = \frac{-RW+\sqrt{RW^2+4EF}}{2EF}$.

Bukti. Matriks Jacobi $\mathrm{J}(\widehat{\mathrm{P}}, \widehat{\mathrm{Y}})$ dihitung di titik eksistensi kedua populasi $\mathrm{E}_2 = (\widehat{\mathrm{P}}, \widehat{\mathrm{Y}})$ diberikan oleh:

$$J_{(E_2)} = \begin{bmatrix} 1 + h - \dfrac{2ha}{K} - \dfrac{h(1-p)}{\beta} & \dfrac{-h\beta a}{K} \\ 1 + \dfrac{ha}{K} - ha & hK\left(\dfrac{1-P}{\beta}\right) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya dapat dituliskan: $\lambda^2 + M\lambda + N = 0$. Misalkan $C(\lambda) = \lambda^2 + M\lambda + N = 0$, maka $C(1) = h^2EF + h(E+F) + G + 2$ dengan $G = \frac{h\beta a}{K}$. Dari persamaan karakteristik dip eroleh nilai eigen $\lambda_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2-4N}}{2}$ nilai $C(-1)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

i) $C(-1) > 0$ jika $\vartheta > 0$ dan $h < \tau$
ii) $C(-1) = 0$ jika $\vartheta > 0$ dan $h = \tau$
iii) $C(-1) < 0$ jika $\vartheta > 0$ dan $h > \tau$

Pada kasus $\vartheta < 0$, mengakibatkan $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$. Adapun nilai N dinyatakan sebagai berikut:

i) $N < 1$ dan $|\lambda_{1,2}| < 0$ jika $h < \min\left(\frac{1}{E+F}, V\right)$.
ii) $N = 1$ dan $|\lambda_{1,2}| = 0$ jika $h = \omega$ dan $h^2(E^2 + F^2 - 2EF) + 2h(E+F) + 4h\frac{Fa}{K}$.
iii) $N > 1$ dan $|\lambda_{1,2}| > 0$ jika $h < \frac{-RW-\sqrt{RW^2+4EF}}{2EF}$ atau $h > \frac{-RW+\sqrt{RW^2+4EF}}{2EF}$ dan $h > \frac{1}{E+F}$ jika $E + F > 0$.

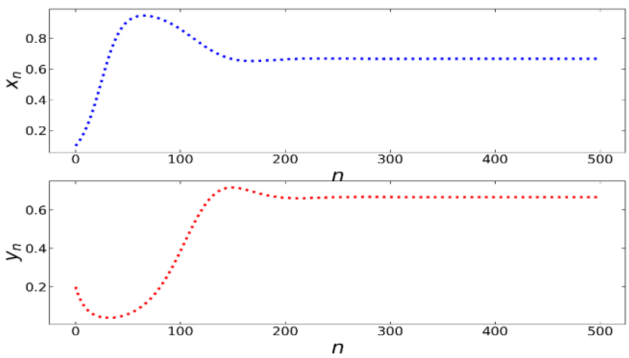
Simulasi Numerik

Pada tahap ini, dilakukan simulasi numerik untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan E_1 dan E_2. Pemilihan parameter didasarkan pada kondisi-kondisi yang telah dianalisis sebelumnya. Nilai-nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Nilai Parameter

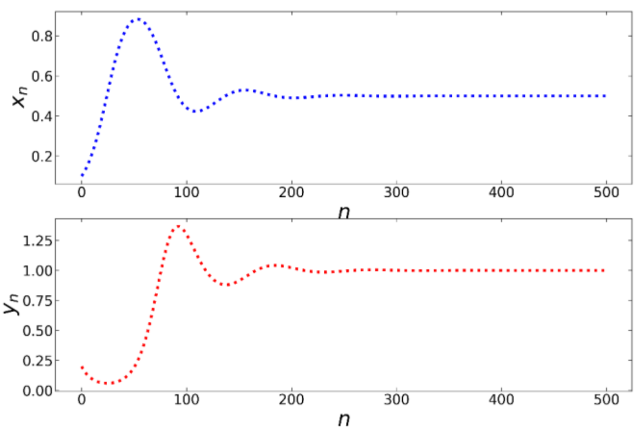
Titik Kesetimbangan	K	a	β	h	τ
E_1	1.5	1	0.5	0	0
E_2	2	1	0.5	0.1	0.2

Pada awalnya, x_n mengalami peningkatan yang cukup cepat, mencapai puncaknya sekitar iterasi $n = 100$, sebelum menurun dan akhirnya mendekati nilai kesetimbangan sekitar $x_n \approx 0.7$. Pola ini menunjukkan bahwa sistem untuk variabel x_n memiliki osilasi awal yang kemudian meredam menuju titik kesetimbangan stabil. Sedangkan pada awal iterasi y_n dimulai dengan nilai yang rendah, mengalami peningkatan yang lebih lambat dibandingkan x_n, dan mencapai nilai puncak sekitar $x_n = 200$. Setelah y_n mengalami sedikit penurunan sebelum akhirnya mendekati nilai kesetimbangan stabil sekitar $y_n \approx 0.6$. Hal ini dapat dilihat pada gambar 1 berikut.



Gambar 1. *Simulasi Titik Kesetimbangan* E_1

Kemudian pada gambar 2 menunjukkan kestabilan sistem dinamik diskrit nonlinear setelah mengalami osilasi transien (awal). Nilai x_n dan y_n akhirnya mencapai kondisi setimbang pada nilai masing-masing 0.5 dan 1.0. Dinamika ini bisa mencerminkan interaksi *predator-prey* atau sistem populasi sejenis, di mana x_n bisa diinterpretasikan sebagai populasi prey yang tumbuh cepat pada awalnya, tetapi stabil pada nilai yang lebih rendah. dan y_n sebagai populasi predator meningkat mengikuti prey, kemudian turun dan stabil pada nilai yang lebih tinggi.



Gambar 2. *Simulasi Titik Kesetimbangan* E_2

SIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi numerik, sistem dinamik diskrit nonlinear menunjukkan pola osilasi pada tahap awal sebelum akhirnya mencapai kestabilan. Hal ini menunjukkan bahwa populasi *prey* tumbuh dengan cepat di awal, tetapi akhirnya stabil pada nilai yang lebih rendah. Sementara itu pertumbuhan *predator* bergantung pada *prey*, dengan pola peningkatan yang mengikuti *prey* sebelum akhirnya stabil di tingkat yang lebih tinggi. Secara keseluruhan, sistem ini menunjukkan kestabilan asimtotik, di mana setelah mengalami osilasi transien, kedua variabel mencapai titik kesetimbangan. Populasi *predator* cenderung stabil di tingkat yang lebih tinggi dibandingkan populasi *prey*, mencerminkan interaksi *predator-prey* yang seimbang.

DAFTAR PUSTAKA

1. Aprilia, V., dan Savitri, D., S.Si., M.Si. (2019). Model matematika interaksi mangsa pemangsa dengan fungsi respon beddingtondeangelis dan pemanenan terhadap pemangsa. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(2):67-71.
2. Gumus, O. A. Dynamics of a Prey-Predator System with Harvesting Effect on Prey. *Chaos Theory and Applications*, 4(3), 144-151. doi: 10.51537/chaos.1183113.
3. Kasim, F., dan Salam, A. 2015. Identifikasi perubahan garis pantai menggunakan citra satelit serta korelasinya dengan penutup lahan di sepanjang pantai selatan provinsi gorontalo. *Jurnal Ilmiah Perikanan dan Kelautan*, 3(4):160-167. doi:10.13140/RG.2.1.5108.0724.
4. Knuuttila, T., dan Loettgers, A. 2017. Modelling as indirect representation? The Lotka-Volterra model revisited. *British Journal for the Philosophy of Science*, 68(4):1007-1036.
5. Pasisingi, N., dan Olii, A. H. 2023. Nelayan dan penangkapan ikan "Nike" di perairan teluk Gorontalo, Teluk Tomini (Indonesia). *Jurnal Sumberdaya Akuatik Indopasifik* ,7(3):267. doi:10.46252/jsai-fpik-unipa.2023.Vol.7.No.3.267.
6. Patulan, R., Ariany, S. P., Kasadi, A., dan Hidayat, T. 2022. Optimasi proses penggaraman dan pengeringan ikan Nike asin kering dengan metode response surface method. *Jurnal Pengolahan Hasil Perikanan Indonesia*, 25(2), 345-351. doi:10.17844/jphpi.v25i2.38398.
7. Pusawidjayanti, K. 2021. Pengaruh eksploitasi berlebihan populasi prey pada model predator prey holling II, pemanenan dan perlindungan prey. *Journal Mathematics & Applications*, 3(2):122-126. doi:10.15548/map.v3i2.3218.
8. Pratama, R. A., Suryani, D. R., & Loupatty, M. (2023). Harvesting effect a Ratio-Dependent Predator-Prey Model. Technium: *Romanian Journal Of Applied Science and Technology*, 17, 1–7.
9. Rahmawati, R., dan Savitri, D. 2023. Model Lotka-Volterra yang mempertimbangkan efek ketakutan pada prey dengan fungsi respon holling tipe II. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(2). doi: 10.26740/mathunesa.v11n2.p304-309.
10. Resmawan, R., Nuha, A. R., Nasib, S. K., & Nashar, L. O. (2024). Dynamical Analysis of a Predator-Prey Model Involving Intraspecific Competition in Predator and Prey Protection. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, 8(3), 706–723. doi:10.31764/jtam.v8i3.22154.
11. Sahami, F. M., Kepel, R. C., Olii, A. H., Pratasik, S. B., Lasabuda, R., Wantasen, A., dan Habibie, S. A. 2020. Morphometric and genetic variations of species composers of nike fish assemblages in Gorontalo Bay Waters, Indonesia. *Biodiversitas*, 21(10):4571-4581. doi: 10.13057/biodiv/d211015.
12. Tian, Y., & Li, H. M. (2022). The Study of a Predator-Prey Model with Fear Effect Based on State-Dependent Harvesting Strategy. *Complexity*, 2022(1). doi:10.1155/2022/9496599.

PROFIL SINGKAT

Leidi Sigar adalah mahasiswa program studi Matematika, fakultas Matematika dan Ipa, Universitas Negeri Gorontalo. Ia aktif dalam himpunan mahasiswa di tingkat prodi dan jurusan.

Nurainsyah Mohamad adalah mahasiswa program studi Matematika, fakultas Matematika dan Ipa, Universitas Negeri Gorontalo. Ia aktif dalam himpunan mahasiswa di tingkat prodi dan jurusan.

Nur Miftah Muhammad adalah mahasiswa program studi Matematika, fakultas Matematika dan Ipa, Universitas Negeri Gorontalo. Ia aktif dalam himpunan mahasiswa di tingkat prodi dan jurusan.

Verawati Moha adalah mahasiswa program studi Matematika, fakultas Matematika dan Ipa, Universitas Negeri Gorontalo. Ia aktif dalam himpunan mahasiswa di tingkat prodi dan jurusan.

Nunung Usman adalah mahasiswa program studi Matematika, fakultas Matematika dan Ipa, Universitas Negeri Gorontalo. Ia aktif dalam himpunan mahasiswa di tingkat prodi dan jurusan.